Online Appendix

Research and the Approval Process: The Organization of Persuasion

by Emeric Henry and Marco Ottaviani

B Supplementary Appendix B: Wald Benchmark Proofs

Proof of Lemma B0

A direct computation yields the following expressions for the conditional probabilities

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma,B) &= \frac{e^{R_2(\sigma-\mathsf{s})}-e^{R_1(\sigma-\mathsf{s})}}{e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=\frac{1}{e^{(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}\frac{e^{R_2(\sigma-\mathsf{s})}-e^{R_1(\sigma-\mathsf{s})}}{e^{(R_2-1)(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{(R_1-1)(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}\\ &= e^{-(S-s)}\frac{e^{R_2(\sigma-\mathsf{s})}-e^{R_1(\sigma-\mathsf{s})}}{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=e^{\sigma-S}\frac{e^{-R_1(\sigma-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\sigma-\mathsf{s})}}{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=e^{\sigma-S}\Psi(\sigma,G)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\psi(\sigma,B) &=\frac{e^{-(1-R_2)(\mathsf{S}-\sigma)}-e^{-(1-R_1)(\mathsf{S}-\sigma)}}{e^{-(1-R_2)(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-(1-R_1)(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=\frac{e^{-\mathsf{S}+\sigma+R_2(\mathsf{S}-\sigma)}-e^{-\mathsf{S}+\sigma+R_1(\mathsf{S}-\sigma)}}{e^{-\mathsf{S}+\mathsf{s}+R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-\mathsf{S}+\mathsf{s}+R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}\\ &=\frac{e^{\sigma-\mathsf{S}}}{e^{-(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}\frac{e^{R_2(\mathsf{S}-\sigma)}-e^{R_1(\mathsf{S}-\sigma)}}{e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=e^{\sigma-\mathsf{s}}\psi(\sigma,G).\end{aligned}$$

This establishes parts (1) and (2) of Lemma B0.

Taking the derivative of $\Psi(\sigma,G)$ with respect to s and rearranging terms we obtain

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi(\sigma,G)}{\partial\mathsf{s}} &=(R_1-R_2)\frac{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})-R_2(\sigma-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})-R_1(\sigma-\mathsf{s})}}{\left(e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2}=(R_1-R_2)e^{\mathsf{s}-\sigma}\frac{e^{-R_1(\mathsf{S}-\sigma)}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\sigma)}}{\left(e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2}\\ &=\frac{(R_1-R_2)e^{\mathsf{s}-\sigma}\psi(\sigma,B)}{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=\frac{(R_1-R_2)\psi(\sigma,G)}{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=a\psi(\sigma,G),\end{aligned}$$

where $a<0$, since $e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}>0$ and $R_1-R_2<0$, and a is independent of σ. Similarly, for $\psi(\sigma,G)$ we have

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(\sigma,G)}{\partial\mathsf{s}} &=-\frac{\left(-R_2e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}+R_1e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)\left(e^{R_2(\mathsf{S}-\sigma)}-e^{R_1(\mathsf{S}-\sigma)}\right)}{\left(e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2}\\ &=\frac{R_2e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-R_1e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}\psi(\sigma,G)=b\psi(\sigma,G).\end{aligned}$$

where $b>0$, since both $e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}>0$ and $R_2e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-R_1e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}>0$, and b is independent of σ. This proves parts (3) and (4).

Finally, taking the derivative of $\Psi(\sigma,G)$ with respect to S we obtain

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi(\sigma,G)}{\partial S} &=-\frac{\left(e^{-R_1(\sigma-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\sigma-\mathsf{s})}\right)\left(-R_1e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}+R_2e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)}{\left(e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2}\\ &=\frac{R_1e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-R_2e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}\Psi(\sigma,G)=f\Psi(\sigma,G),\end{aligned}$$

where $f<0$, since $e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}>0$ and $R_1e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}<0<R_2e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}$, and f is independent of σ. Similarly, we have

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(\sigma,G)}{\partial\mathsf{S}} &= (R_2-R_1)\,\frac{e^{R_1(\mathsf{S}-\sigma)+R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_2(\mathsf{S}-\sigma)+R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{\left(e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2}=(R_2-R_1)\,\frac{e^{\mathsf{S}-\sigma}\left(e^{R_2(\sigma-\mathsf{s})}-e^{R_1(\sigma-\mathsf{s})}\right)}{\left(e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2}\\ &= \frac{(R_2-R_1)\,e^{\mathsf{S}-\sigma}\Psi(\sigma,B)}{e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=\frac{(R_2-R_1)\,\Psi(\sigma,G)}{e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=g\Psi(\sigma,G)>0.\end{aligned}$$

where $g>0$, since both $R_2-R_1>0$ and $e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}>0$, and g does not depend on σ. This completes the proof of Lemma B0.

Proof of Lemma B1

We provide the most general characterization for the upper best reply $B_j(\mathsf{s})$ for a player j who gets a payoff v_j^G (v_j^B) in the good (bad) state and pays a cost of research c_j per unit of time.

(i) First-Order Condition for the Upper Best Reply. By parts (1) and (2) of Lemma B0 player j's expected payoff $u_j(\sigma)$ can be written as

$$u_j(\sigma)=-\frac{c_j}{r}+\frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\left[v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+\left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right]+\frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}}\psi(\sigma,G)(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}. \quad (12)$$

By parts (5) and (6) of Lemma B0**,** taking the derivative with respect to S then yields

$$\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial\mathsf{S}}=\frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\left\{f\cdot\left[v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+\left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right]-e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)+g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\}, \quad (13)$$

which implies that, at an interior solution, the following first-order condition must be satisfied

$$f\cdot\left[v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+\left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right]=e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)-g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}. \quad (14)$$

Equation (14) establishes that $B_j(\mathsf{s})$ is independent of σ in the log-odds space, or, equivalently, that $B_j(s)$ is independent of q in the regular space. Furthermore, it implies that $v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+\left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}>0$ must hold at $\mathsf{S}=B_i(\mathsf{s})$. Two cases can, in fact, be distinguished: if $e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)\geq 0$, then $v_j^G+e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)+\frac{c_j}{r}>0$ simply follows from $v_j^G>0$ and $\frac{c_j}{r}>0$. If $e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)<0$, then $f\left[v_j^G+e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)+\frac{c_j}{r}\right]<0$ must hold, since $g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})>0$ and $f<0$, so that $v_j^G+e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)+\frac{c_j}{r}>0$ is again satisfied.

In the case of the evaluator, where $c_e=0$, (14) simplifies into $v_e^G+e^{-\mathsf{S}}v_e^B=\frac{e^{-\mathsf{S}}v_e^B}{f}$.

Second-Order Condition for the Upper Best Reply. Differentiating (13) with respect to S we have

$$\frac{\partial^2u(\sigma)}{\partial\mathsf{S}^2}=\frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}}\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial\Psi(\sigma,G)}{\partial\mathsf{S}}\{f\cdot[v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+(1-e^{-\mathsf{S}})\frac{c_j}{r}]-e^{-\mathsf{S}}(v_j^B+\frac{c_j}{r})+g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\}\\ +\Psi(\sigma,G)\left\{\frac{\partial f}{\partial\mathsf{S}}[v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+(1+e^{-\mathsf{S}})\frac{c_j}{r}]+e^{-\mathsf{S}}(v_j^B+\frac{c_j}{r})(1-f)+\frac{\partial g}{\partial\mathsf{S}}(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\}\end{array}\right\}.$$

Equation (14) then implies

$$\left.\frac{\partial^2u(\sigma)}{\partial\mathsf{S}^2}\right|_{\mathsf{S}=B_j(\mathsf{s})}=\frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\left\{e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)\left[\frac{\partial f}{\partial\mathsf{S}}\frac{1}{f}+(1-f)\right]+\left(\frac{\partial g}{\partial\mathsf{S}}-\frac{\partial f}{\partial\mathsf{S}}\frac{g}{f}\right)(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\}$$

$$= \frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\left\{e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)\left[\frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}}\frac{1}{f}+(1-f)\right]+g\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial \mathsf{S}}\frac{1}{g}-\frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}}\frac{1}{f}\right)(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\}$$

Some algebra yields

$$\begin{aligned} 1-f &= \frac{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-R_1e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}+R_2e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}} \\ &= \frac{R_2e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-R_1e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=\frac{R_2e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-R_1e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}=-\frac{\partial g}{\partial \mathsf{S}}\frac{1}{g}. \end{aligned}$$

Substituting for $\frac{\partial g}{\partial \mathsf{S}}\frac{1}{g}$ in the above expression and rearranging terms we have

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^2 u(\sigma)}{\partial \mathsf{S}^2}\right|_{\mathsf{S}=B_i(\mathsf{s})} \\ = \;& \frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\left\{e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)\left[\frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}}\frac{1}{f}+(1-f)\right]+g\left[-(1-f)-\frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}}\frac{1}{f}\right](1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\} \\ = \;& \frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\left[\frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}}\frac{1}{f}+(1-f)\right]\left[e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)-g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right] \end{aligned}$$

which, by equation (14), can be rewritten as

$$\left.\frac{\partial^2 u(\sigma)}{\partial \mathsf{S}^2}\right|_{\mathsf{S}=B_j(\mathsf{s})} = \frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\left[\frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}}+f\cdot(1-f)\right]\left[v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+\left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right].$$

Recalling from above that $v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+\left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}>0$ at $\mathsf{S}=B_j(\mathsf{s})$, we conclude that

$$\left.\frac{\partial^2 u(\sigma)}{\partial \mathsf{S}^2}\right|_{\mathsf{S}=B_j(\mathsf{s})} < 0 \tag{15}$$

if and only if $\frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}} < -f(1-f)$, i.e.,

$$\frac{(R_2-R_1)^2e^{-(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{\left(e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2} < \frac{\left(R_2^2+R_1^2\right)e^{-(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-R_1R_2\left(e^{-2R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}+e^{-2R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)}{\left(e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}-e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2},$$

which always holds being equivalent to $2e^{-(\mathsf{S}-\mathsf{s})} < e^{-2R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}+e^{-2R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})} \Leftrightarrow 0 < (e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})})^2$.

(ii) We now examine the slope of the upper best reply. First, we show that $B_j(\mathsf{s}) > \mathsf{s}$ if $\mathsf{s} < \hat{\sigma}_j$ and $B_j(\mathsf{s}) = \mathsf{s}$ otherwise. We start with computing the limit of $\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}}$ as $\mathsf{S} \to \mathsf{s}$. Recall that

$$\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = \frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\left\{f\cdot\left[v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+\left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right]-e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)+g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\}$$

and focus on the last term of the product. A simple calculation gives

$$\begin{aligned} &\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}}\left\{f\cdot\left[v_j^G+e^{-\mathsf{S}}v_j^B+\left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right]-e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)+g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\} \\ = \;& \lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} f\cdot\left[v_j^G+e^{-\mathsf{s}}v_j^B\right]-e^{-\mathsf{s}}\left(v_j^B+\frac{c_j}{r}\right)+\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}}(f+g)\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}. \end{aligned}$$

Because $\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} f = -\infty$ and $\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} (f+g) = 0$, one sees that the sign of the limit above depends on the sign of $v_j^G + e^{-\mathsf{s}} v_j^B$. Specifically, we have

$$\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} \left\{ f\cdot\left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right] - e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B + \frac{c_j}{r}\right) + g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\} = \infty$$

if $\mathsf{s} < \hat{\sigma}_j$, in which case $v_j^G + e^{-\mathsf{s}} v_j^B < 0$, and

$$\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} \left\{ f\cdot\left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right] - e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B + \frac{c_j}{r}\right) + g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\} = -\infty$$

otherwise. Since $\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} \frac{e^\sigma}{1+e^\sigma}\Psi(\sigma,G) = \infty$, overall we have $\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = \infty$ if $\mathsf{s} < \hat{\sigma}_j$ and $\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = -\infty$ if $\mathsf{s} \geq \hat{\sigma}_j$.

Next, we compute the limit of $\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}}$ as $\mathsf{S} \to\infty$. We have

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathsf{S}\to\infty} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} \\ = \; & \lim_{\mathsf{S}\to\infty} \frac{e^\sigma \Psi(\sigma,G)}{1+e^\sigma} \left\{ f\cdot\left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right] - e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B + \frac{c_j}{r}\right) + g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\}. \end{aligned}$$

Focusing on the second term of the product, we obtain

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathsf{S}\to\infty} \left\{ f\cdot\left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right] - e^{-\mathsf{S}}\left(v_j^B + \frac{c_j}{r}\right) + g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\right\} \\ = \; & \lim_{\mathsf{S}\to\infty} f\cdot\left[v_j^G + \frac{c_j}{r}\right] + \lim_{\mathsf{S}\to\infty} g\cdot(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}. \end{aligned}$$

Since $\lim_{\mathsf{S}\to\infty} \frac{e^\sigma}{1+e^\sigma}\Psi(\sigma,G) = 0$, $\lim_{\mathsf{S}\to\infty} f = R_1 < 0$ and $\lim_{\mathsf{S}\to\infty} g = 0$, we have that overall $\lim_{\mathsf{S}\to\infty} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = 0^-$.

Having computed the limits at the two extremes of the domain of S, we now consider two different cases. First, assume $\mathsf{s} < \hat{\sigma}_e$. Then, since $\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = \infty$ and $\lim_{\mathsf{S}\to\infty} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = 0^-$, by continuity there must exist a solution to $\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = 0$, implying that in this case $B_j(\mathsf{s}) > \mathsf{s}$. Next, suppose $\mathsf{s} \geq \hat{\sigma}_j$. In this case we show that $\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} < 0$. To see this assume by contradiction that there exists $\tilde{\mathsf{S}}$ such that $\left.\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}}\right|_{\mathsf{S}=\tilde{\mathsf{S}}} \geq 0$. Since $\lim_{\mathsf{S}\to\mathsf{s}} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = -\infty$ and $\lim_{\mathsf{S}\to\infty} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = 0^-$, by continuity there must exist an interior solution $\mathsf{S}^* \leq \tilde{\mathsf{S}}$ to $\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}} = 0$ such that $\left.\frac{\partial^2 u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{S}^2}\right|_{\mathsf{S}^*=B_j(\mathsf{s})} \geq 0$, a contradiction. This establishes that $B_j(\mathsf{s}) > \mathsf{s}$ if $\mathsf{s} < \hat{\sigma}_j$ and $B_j(\mathsf{s}) = \mathsf{s}$ otherwise.

Proof of Lemma B2

We provide the most general characterization for the lower best reply $b_j(\mathsf{S})$ for a player j who gets a payoff v_j^G (v_j^B) in the good (bad) state and pays a cost of research c_j per unit of time.

(i) First-Order Condition for the Lower Best Reply. By parts (3) and (4) of Lemma B0**,** taking a derivative of (12) with respect to s yields

$$\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = \frac{e^\sigma \psi(\sigma,G)}{1+e^\sigma}\left\{a\left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right] + \frac{c_j}{r}\left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}}\right]\right\}. \quad (16)$$

Hence, player j's first order condition is

$$v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r} = -\frac{1}{a}\frac{c_j}{r}\left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}}\right] \tag{17}$$

which establishes that $b_j(\mathsf{S})$ is independent of σ in the log-odds space and, thus, that $b_j(S)$ is independent of q in the regular space. In the case of the informer, assuming $v_i^G = v_i^B = v_i$, the first order condition (17) simplifies into

$$a\left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\left(v_i + \frac{c}{r}\right) + \frac{c}{r}\left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}}\right] = 0. \tag{18}$$

Second Order Condition for the Lower Best Reply. Taking a derivative with respect to s of (16) gives

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}^2} \\
= \; & \frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}}\frac{\partial \psi(\sigma,G)}{\partial \mathsf{s}}\left\{a\left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}}v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right] + \frac{c_j}{r}\left(b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}}\right)\right\} \\
& + \frac{e^{\sigma}\psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\left\{\frac{\partial a}{\partial \mathsf{s}}\left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}}v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right)\frac{c_j}{r}\right] + \frac{c_j}{r}\frac{\partial b}{\partial \mathsf{s}}(1+e^{-\mathsf{s}}) + \frac{c_j}{r}(1-b)e^{-\mathsf{s}}\right\}.
\end{aligned}$$

For values of s that satisfy the first order condition (17), we have

$$\left.\frac{\partial^2 u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}^2}\right|_{\mathsf{s}=b_j(\mathsf{S})} = \frac{e^{\sigma}\psi(\sigma,G)}{1+e^{\sigma}}\frac{c_j}{r}\left\{-\frac{\partial a}{\partial \mathsf{s}}\frac{1}{a}\left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}}\right] + \frac{\partial b}{\partial \mathsf{s}}(1+e^{-\mathsf{s}}) + (1-b)e^{-\mathsf{s}}\right\}.$$

Using

$$\begin{aligned}
1-b &= \frac{e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - R_2 e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})} + R_1 e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}} \\
&= \frac{R_1 e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - R_2 e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}} = \frac{R_1 e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - R_2 e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}} = -\frac{\partial a}{\partial \mathsf{s}}\frac{1}{a},
\end{aligned}$$

the above expression simplifies to

$$\left.\frac{\partial^2 u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}^2}\right|_{\mathsf{s}=b_j(\mathsf{S})} = \frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}}\psi(\sigma,G)(1+e^{-\mathsf{s}})\frac{c_j}{r}\left[b(1-b) + \frac{\partial b}{\partial \mathsf{s}}\right],$$

which is negative if and only if $\frac{\partial b}{\partial \mathsf{s}} < -b(1-b)$, i.e.,

$$\frac{(R_2-R_1)^2 e^{(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{\left(e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - e^{R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2} < \frac{\left(R_2^2+R_1^2\right)e^{(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - R_1R_2\left(e^{2R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})} + e^{2R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)}{\left(e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - e^{R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}\right)^2}$$

which always holds being equivalent to $2e^{(\mathsf{S}-\mathsf{s})} < e^{2R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})} + e^{2R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}$. Thus,

$$\left.\frac{\partial^2 u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}^2}\right|_{\mathsf{s}=b_j(\mathsf{S})} < 0. \tag{19}$$

(ii) Turn to the slope of the lower best reply. First, we show that $b_j(\mathsf{S}) < \mathsf{S}$ if $\mathsf{S} > \hat{\sigma}_j$ and $b_j(\mathsf{S}) = \mathsf{S}$ otherwise. We start with computing the limit of $\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}}$ as $\mathsf{s} \to \mathsf{S}$. Recall that

$$\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = \frac{e^{\sigma}\psi(\sigma, G)}{1+e^{\sigma}} \left\{ a \left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right) \frac{c_j}{r} \right] + \frac{c_j}{r} \left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}} \right] \right\}$$

and focus on the last term of the product. A simple calculation gives

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} \left\{ a \left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right) \frac{c_j}{r} \right] + \frac{c_j}{r} \left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}} \right] \right\} \\ = \; & \lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} a \cdot \left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B \right] - e^{-\mathsf{S}} \frac{c_j}{r} + \lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} (a+b) \cdot (1+e^{-\mathsf{S}}) \frac{c_j}{r}. \end{aligned}$$

Because $\lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} a = -\infty$ and $\lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} (a+b) = 0$, one sees that the sign of the limit above depends on the sign of $v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B$. Specifically, we have

$$\lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} \left\{ a \left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right) \frac{c_j}{r} \right] + \frac{c_j}{r} \left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}} \right] \right\} = -\infty$$

if $\mathsf{S} > \hat{\sigma}_j$, in which case $v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B > 0$, and

$$\lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} \left\{ a \left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right) \frac{c_j}{r} \right] + \frac{c_j}{r} \left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}} \right] \right\} = +\infty$$

otherwise. Since $\lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} \frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}} \psi(\sigma, G) = \infty$, overall we have $\lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = -\infty$ if $\mathsf{S} > \hat{\sigma}_j$ and $\lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = \infty$ if $\mathsf{S} \leq \hat{\sigma}_j$.

Next,

$$\lim_{\mathsf{s}\to-\infty} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = \lim_{\mathsf{s}\to-\infty} \frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}} \psi(\sigma, G) \left\{ a \left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right) \frac{c_j}{r} \right] + \frac{c_j}{r} \left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}} \right] \right\}$$

Focusing on the second factor, we obtain

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathsf{s}\to-\infty} \left\{ a \left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right) \frac{c_j}{r} \right] + \frac{c_j}{r} \left[b(1+e^{-\mathsf{s}}) - e^{-\mathsf{s}} \right] \right\} \\ = \; & \lim_{\mathsf{s}\to-\infty} a \cdot \left[v_j^G + e^{-\mathsf{S}} v_j^B + \left(1+e^{-\mathsf{S}}\right) \frac{c_j}{r} \right] + \lim_{\mathsf{s}\to-\infty} b \cdot \frac{c_j}{r} + \lim_{\mathsf{s}\to-\infty} (b-1) e^{-\mathsf{s}} \frac{c_j}{r}. \end{aligned}$$

Since $\lim_{\mathsf{s}\to-\infty} \frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}} \psi(\sigma, G) = 0$, $\lim_{\mathsf{s}\to-\infty} b = R_2 > 0$ and $\lim_{\mathsf{s}\to-\infty} a = 0$, overall we have $\lim_{\mathsf{s}\to-\infty} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = 0^+$.

Having computed the limits at the two extremes of the domain of s, we now consider two different cases. First, assume $\mathsf{S} > \hat{\sigma}_j$. Then, since $\lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = -\infty$ and $\lim_{\mathsf{s}\to-\infty} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = 0^+$, by continuity there must exist a solution to $\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = 0$, implying that in this case $b_j(\mathsf{S}) < \mathsf{S}$. Next, suppose $\mathsf{S} \leq \hat{\sigma}_j$. In this case we show that $\frac{\partial u(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} > 0$. To see this, assume by contradiction that there exists $\tilde{\mathsf{s}}$ such that $\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}}\Big|_{\mathsf{s}=\tilde{s}} \leq 0$. Since $\lim_{\mathsf{s}\to\mathsf{S}} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = \infty$ and $\lim_{\mathsf{s}\to-\infty} \frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = 0^+$, by continuity there must exist an interior solution $\mathsf{s}^* \geq \tilde{\mathsf{s}}$ to $\frac{\partial u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = 0$ such that $\frac{\partial^2 u_j(\sigma)}{\partial \mathsf{s}^2}\Big|_{\mathsf{s}^*=b(\mathsf{S})} \geq 0$, a contradiction. This establishes that $b_j(\mathsf{S}) < \mathsf{S}$ if $\mathsf{S} > \hat{\sigma}_j$ and $B_j(\mathsf{S}) = \mathsf{S}$ otherwise.

Proof of Proposition 0

The Wald solution is characterized by the interior intersection of $B_w(s)$ and $b_w(S)$, which always exists by the properties established in Lemmas B1 and B2.

C Supplementary Appendix C: Technical Results

Lemma C1 *The evaluator's marginal value of anticipating rejection increases in the initial belief,*

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{s} \partial \sigma} > 0. \tag{20}$$

Proof of Lemma C1

Using equation (16) from Appendix B for $c_j = 0$ we have

$$\frac{\partial u_e(\sigma)}{\partial \mathsf{s}} = \frac{e^\sigma}{1+e^\sigma} \psi(\sigma, G) a \left[v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B \right],$$

so that, since a does not depend on σ,

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{s} \partial \sigma} = \frac{\partial \left(\frac{e^\sigma}{1+e^\sigma} \psi(\sigma, G) \right)}{\partial \sigma} a \left[v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B \right]. \tag{21}$$

Furthermore

$$\frac{\partial \left(\frac{e^\sigma}{1+e^\sigma} \psi(\sigma, G) \right)}{\partial \sigma} = \frac{e^\sigma \psi(\sigma, G) + (1+e^\sigma) e^\sigma \psi_\sigma(\sigma, G)}{(1+e^\sigma)^2}$$

and

$$\psi_\sigma(\sigma, G) = \frac{-R_2 e^{R_2(S-\sigma)} + R_1 e^{R_1(S-\sigma)}}{e^{R_2(S-s)} - e^{R_1(S-s)}} < 0.$$

From

$$-\psi_\sigma(\sigma, G) = \frac{R_2 e^{R_2(S-\sigma)} - R_1 e^{R_1(S-\sigma)}}{e^{R_2(S-s)} - e^{R_1(S-s)}} > \frac{e^{R_2(S-\sigma)} - e^{R_1(S-\sigma)}}{e^{R_2(S-s)} - e^{R_1(S-s)}} = \psi(\sigma, G)$$

we have

$$\frac{\partial \left(\frac{e^\sigma}{1+e^\sigma} \psi(\sigma, G) \right)}{\partial \sigma} = \frac{e^\sigma \psi(\sigma, G) + (1+e^\sigma) e^\sigma \psi_\sigma(\sigma, G)}{(1+e^\sigma)^2} < 0.$$

Overall, replacing in equation (21), and using $a < 0$, we obtain (20).

Lemma C2 *The evaluator's marginal value of delaying approval increases in the initial belief,*

$$\left. \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{S} \partial \sigma} \right|_{\mathsf{s}=b_i(\mathsf{S})} > 0. \tag{22}$$

Proof of Lemma C2

Using (8) from Appendix B we have

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{S} \partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{e^\sigma}{1+e^\sigma} \Psi(\sigma, G) \right) \left[f \left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B \right) - e^{-\mathsf{S}} v_e^B \right],$$

given that f is independent of σ. Thus,

$$\frac{\partial \left(\frac{e^\sigma}{1+e^\sigma} \Psi(\sigma, G) \right)}{\partial \sigma} = \frac{e^\sigma \Psi(\sigma, G) + (1+e^\sigma) e^\sigma \Psi_\sigma(\sigma, G)}{(1+e^\sigma)^2} > 0.$$

Furthermore, for $S < S^n$ we have $\frac{\partial u_e}{\partial \mathsf{S}}(b_i(S), S) > 0$, so that

$$f\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) - e^{-\mathsf{S}} v_e^B > 0.$$

Overall we obtain (22).

Lemma C3 *The evaluator's marginal value of delaying approval decreases in the approval standard,*

$$\left.\frac{\partial^2 u_e}{\partial S^2}\right|_{s=b_i(S)} < 0 \text{ for } S \leq S^n. \tag{23}$$

Proof of Lemma C3

From

$$\left.\frac{\partial u_e}{\partial \mathsf{S}}\right|_{\mathsf{s}=b_i(\mathsf{S})} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathsf{s}} \frac{\partial b_i(\mathsf{S})}{\partial \mathsf{S}} + \frac{\partial u_e}{\partial \mathsf{S}}$$

we have

$$\left.\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{S}^2}\right|_{\mathsf{s}=b_i(\mathsf{S})} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{s}^2}\left(\frac{\partial b_i(\mathsf{S})}{\partial \mathsf{S}}\right)^2 + \frac{\partial u_e}{\partial \mathsf{s}} \frac{\partial^2 b_i(\mathsf{S})}{\partial \mathsf{S}^2} + 2\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{S} \partial \mathsf{s}} \frac{\partial b_i(\mathsf{S})}{\partial \mathsf{S}} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{S}^2}. \tag{24}$$

Using the expression for the evaluator's expected payoff (12) for $c_j = 0$ and $j = e$, we now show that the four terms in (24) are negative so that we have (23):

- Term 1: $\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{s}^2}\left(\frac{\partial b_i(\mathsf{S})}{\partial \mathsf{S}}\right)^2 < 0$. From

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{s}^2} = \frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}} \psi(\sigma, G)\left(\frac{\partial a}{\partial \mathsf{s}} + ab\right)\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) < 0$$

  Simple computations yield $\frac{\partial a}{\partial \mathsf{s}} + ab = a\frac{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}{e^{-R_1(\mathsf{S}-\mathsf{s})} - e^{-R_2(\mathsf{S}-\mathsf{s})}}$, from which the claim follows.
- Term 2: $\frac{\partial u_e}{\partial \mathsf{s}} \frac{\partial^2 b_i(\mathsf{S})}{\partial \mathsf{S}^2} < 0$. The evaluator's expected payoff is decreasing in s since the evaluator does not pay for research. The claim then follows from $\frac{\partial^2 b_i(\mathsf{S})}{\partial \mathsf{S}^2} > 0$.
- Term 3: $2\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{S} \partial \mathsf{s}} \frac{\partial b_i(\mathsf{S})}{\partial \mathsf{S}} < 0$. Using the fact that $f\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) - e^{-\mathsf{S}} v_e^B > 0$ for $\mathsf{S} < \mathsf{S}^n$, we have

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{S} \partial \mathsf{s}} = \frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}} \psi(\sigma, G)\left(fa\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) - ae^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) < 0.$$

  Given that $b_i(\mathsf{S})$ is increasing in S, the claim follows.
- Term 4: $\frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{S}^2} < 0$. From derivations above, we have

$$\frac{\partial u_e}{\partial \mathsf{S}} = \frac{e^{\sigma}}{1+e^{\sigma}} \Psi(\sigma, G)\left(f\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) - e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right),$$

  so that

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathsf{S}^2} &= \frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma, G)}{1+e^{\sigma}}\left[\left(f^2 + \frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}}\right)\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) + (-2f+1)\, e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right] \\ &= \frac{e^{\sigma}\Psi(\sigma, G)}{1+e^{\sigma}}\left\{f\left[f\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) - e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right] + \frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}}\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) + (1-f)e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right\}. \end{aligned}$$

Using the fact that $f\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) - e^{-\mathsf{S}} v_e^B > 0$ for $\mathsf{S} < \mathsf{S}^n$ and that $f < 0$, we conclude $f\left(f\left(v_e^G + e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) - e^{-\mathsf{S}} v_e^B\right) < 0$. Given that $\frac{\partial f}{\partial \mathsf{S}} < 0$ and $1 - f > 0$ as shown above, (23) follows.